作业七　（12月8日课堂上交）

1. 本题中，自然数的定义（包括上面的加法、乘法等）是课程中通过Peano公理所定义的，整除、素数的概念也是依照课程中的定义。可以直接使用的，仅限于课件中和以往作业中证明过的结论（课件中练习中待证明的结论不可以直接使用）。

i) 证明自然数乘法的消去率：对于自然数 m, n, k ，如果 $k \neq 0$ 且 $m \cdot k = n \cdot k$ ，则 $m = n$ 。

ii) 证明：若自然数 m 和 n 满足 $m \cdot n = 0$ ，则 $m = 0$ 或者 $n = 0$ 。

iii) 证明：对于非零自然数 m, n 和素数 p ，如果 $p|(m \cdot n)$，则 $p|m$ 或者 $p|n$ 。

iv) 证明：假定 m 是大于等于 2 的自然数，则 $m = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ ，其中 $p_1, \cdots, p_s$ 是互不相等的素数，并且 $r_1, \cdots, k_s$ 都是大于等于 1 的自然数。如果不考虑其中互不相等素数排列的次序，m 的如上分解（称为素因子分解）还是唯一的。

注：iv）中所证明之结论，也被称为唯一分解定理。不仅仅是自然数（或者整数），只要能够做带余除法（Euclidean性），并且满足ii）中所证明之性质，都有类似的唯一分解定理（比如关于 x 的实系数多项式全体）。其证明方法，和上面 iv) 的证明方法，本质上是一样的。

2. 根据课上所学内容，完成如下：

i) 在群 G 中，若将 a 的逆元记为 a^{-1} ，将 b 的逆元记为 b^{-1} 。证明（或者更准确的说，验证）：$a \cdot b$ 的逆元是 $b^{-1} \cdot a^{-1}$ 。

ii) 证明：群 G 的左乘，的确是个群 G 在集合 G 上的作用。其中左乘定义如下（作为集合， X = G ）：

$$G \times X \longrightarrow X, \;\; (g, x) \mapsto g \cdot x \;\; \forall\, g \in G, x \in G$$ 。

iii) 群 G 的右乘，是不是个群 G 在集合 G 上的作用？若是，给出证明；若否，给出证明。这里右乘定义为（作为集合， X = G ）：

$$G \times X \longrightarrow X, \;\; (g, x) \mapsto x \cdot g \;\; \forall\, g \in G, x \in G$$ 。

iv) 假定

$$G \times X \longrightarrow X, (g, x) \mapsto g(x) \;\; \forall\, g \in G, x \in X$$

给出了群 G 在集合 X 上的作用。对于 G 的任意子群 H ，证明

$$H \times X \longrightarrow X, (h, x) \mapsto h(x) \;\; \forall\, h \in H, x \in X$$

给出了群 H 在集合 X 上的作用。